

# РАЗВИТИЕ НЕКОТОРЫХ МЕТОДОВ Г.Г. ТУМАШЕВА В ТЕОРИИ ПОДВОДНОГО КРЫЛА

А.М.Елизаров, М.В.Лотфуллин, С.И.Филиппов

*НИИ математики и механики им. Н.Г.Чеботарева*

*Казанского государственного университета*

*420008, Казань, ул. Университетская, 17*

*Elizarov@ksu.ru, Sergei.Filippov@ksu.ru*

К числу направлений исследований в аэрогидромеханике, которыми занимался Г.Г.Тумашев, относится теория подводного крыла. В этой области отметим два метода, связанные с именем Гумера Галеевича. Один из них основан на моделировании свободной поверхности гидродинамическими особенностями и построении комплексного потенциала течения в виде, точно удовлетворяющем граничному условию на контуре. В разделах 1, 2 настоящей работы приведены результаты двух новых исследований, базирующихся на названном методе. В разделе 3 представлен другой метод, который опирается на оригинальную аппроксимацию граничного условия на свободной поверхности, также связанную с именем Г.Г.Тумашева. Каждый из указанных трех разделов работы является независимым, со своей нумерацией формул, рисунков и литературных источников.

## 1. Капиллярно-гравитационные волны при обтекании подводного контура

Рассмотрим поток идеальной несжимаемой весомой жидкости плотности  $\rho$ , имеющий свободную поверхность, в котором находится круговой цилиндр  $C$ . Пусть ось  $ox$  совпадает с невозмущенным уровнем свободной поверхности и направлена навстречу потоку, ось  $oy$  направлена вертикально вверх и проходит через центр цилиндра – точку  $(0, -h)$ . В системе координат, связанной с контуром, течение плоскопараллельное, установившееся, потенциальное. Скорость потока впереди на бесконечности равна  $-U_0$ .

Граничное условие на свободной поверхности получается с использованием интеграла Бернулли и заимствованного из физики закона Лапласа  $-\alpha/R = p - p_0$ , где  $p$  – давление в жидкости,  $p_0$  – постоянное атмосферное давление,  $R$  – радиус кривизны свободной поверхности, а  $\alpha$  – коэффи-

циент поверхностного натяжения. В рамках теории волн малой амплитуды, следуя [1], при  $y=0$  можно получить

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{\alpha i}{\rho g} \frac{d^2 W(z)}{dz^2} - \frac{U_0^2}{g} \frac{dW(z)}{dz} - iW(z) \right] = 0, \quad z = x + iy, \quad (1)$$

где  $g$  – ускорение силы тяжести,  $W(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  – комплексный потенциал возмущенного течения. На контуре цилиндра  $C$  выполняется условие

$$\operatorname{Im} W(z) = U_0 y + \psi_0, \quad \psi_0 = \text{const}. \quad (2)$$

Кроме граничных условий (1), (2) необходимо задать условие излучения волн. Как отмечено в [1], согласно практическим наблюдениям более длинные волны, в образовании которых главную роль играет весомость, развиваются за телом, а более короткие волны, связанные по преимуществу с капиллярностью, распространяются вверх по течению. Отметим также, что в противовес чисто капиллярным и чисто гравитационным волнам смешанные волны существуют только при числах Фруда  $Fr \geq Fr^*$ , где  $Fr^*$  – некоторое минимальное критическое значение, отличное от нуля.

Для решения задачи применим метод, основанный на идее Г.Г. Тумашева моделирования свободной поверхности двойным слоем особенностей (диполей), который впервые был предложен в работе [2]. Будем отыскивать комплексный потенциал течения в виде

$$W(z) = W_0(z) + V(z) + \Phi(z), \quad (3)$$

где  $W_0(z) = -U_0 a^2 / (z + ih)$  – комплексный потенциал возмущенного течения при обтекании кругового цилиндра безграничным потоком,

$$V(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu(t)}{z - t} dt$$

– потенциал от распределенных особенностей вещественной плотности  $\mu(x)$ ,

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} F(z, t) \mu(t) dt$$

– дополнительный потенциал к  $V(z)$ , в котором функция  $F(z, t) = a^2 / \{ (t - ih)^2 [z + ih - a^2 / (t - ih)] \}$  построена на основании теоремы

Милн-Томсона об окружности [3] таким образом, что потенциал в форме (3) удовлетворяет на контуре условию (2).

Плотности распределенных особенностей определяются из условия (1). Подставив комплексный потенциал (3) в (1), окончательно имеем

$$\mu(x) = \sigma(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t) \mu(t) dt, \quad (4)$$

$$\sigma(x) = \frac{2g}{U_0^2 s_0} \operatorname{Re} \left[ \frac{\alpha i (\bar{s}_1 - \bar{s}_2)}{\rho g} \frac{U_0 a^2}{x + ih} + E(\bar{s}_1) \exp(\bar{s}_1 x) \int_{-\infty}^x \exp(-\bar{s}_1 t) \frac{U_0 a}{t + ih} dt - \right. \\ \left. - E(\bar{s}_2) \exp(\bar{s}_2 x) \int_{\infty}^x \exp(-\bar{s}_2 t) \frac{U_0 a}{t + ih} dt \right],$$

$$K(x, t) = -\frac{1}{\pi i} \frac{g}{U_0^2 s_0} \left[ \frac{\alpha i (\bar{s}_1 - \bar{s}_2)}{\rho g (x - \zeta(t))} + E(\bar{s}_1) \exp(\bar{s}_1 x) \int_{-\infty}^x \exp(-\bar{s}_1 \lambda) H(\lambda, t) d\lambda - \right. \\ \left. - E(\bar{s}_2) \exp(\bar{s}_2 x) \int_{\infty}^x \exp(-\bar{s}_2 \lambda) H(\lambda, t) d\lambda \right],$$

$$H(\lambda, t) = \frac{a^2}{(\lambda - \zeta(t))(t - ih)^2}, \quad E(\bar{s}_j) = -i - \frac{U_0^2}{g} \bar{s}_j + \frac{\alpha i \bar{s}_j^2}{\rho g} \quad (j = 1, 2),$$

$$s_1 = \frac{\rho U_0^2 i}{2\alpha} (1 + s_0), \quad s_2 = \frac{\rho U_0^2 i}{2\alpha} (1 - s_0), \quad s_0 = \sqrt{1 - 4\alpha g / (\rho U_0^4)},$$

$$\zeta(t) = -ih + a^2 / (t - ih).$$

Уравнение (4) несложно привести к безразмерному виду, выделив число Фруда  $Fr = U_0 / \sqrt{ga}$  и аналог числа Вебера  $We_g = \alpha / (g\rho a^2)$ . Запишем уравнение (4) в операторном виде

$$\mu(x) = \sigma(x) + G[\mu]. \quad (5)$$

Решение уравнения (5) получается в виде ряда  $\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(x)$  методом последовательных приближений  $\mu_n(x) = G[\mu_{n-1}]$ , где нулевым приближением служит  $\mu_0(x) = \sigma(x)$ . Выше было рассмотрено бесциркуляционное обтекание. В общем случае комплексный потенциал течения можно представить в виде суммы бесциркуляционного и чисто циркуляционного течений. По-

тенциал чисто циркуляционного течения может быть записан также в форме (3), где  $\mu$  следует заменить на  $\mu_\Gamma$ , а  $W_0$  – на

$$W_{\Gamma 0}(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{z + ih - a^2 / (\bar{z}_\Gamma + ih)}{z - z_\Gamma},$$

$\Gamma$  – значение циркуляции,  $z_\Gamma$  – произвольно выбранная точка верхней полуплоскости. Для  $\mu_\Gamma$  можно получить уравнение типа (5). Волновое сопротивление и подъемную силу контура можем определить по формуле Чаплыгина

$$X - iY = \frac{i\rho}{2} \oint_C \left[ \frac{dW}{dz} \right]^2 dz - i\rho\Gamma U_0.$$

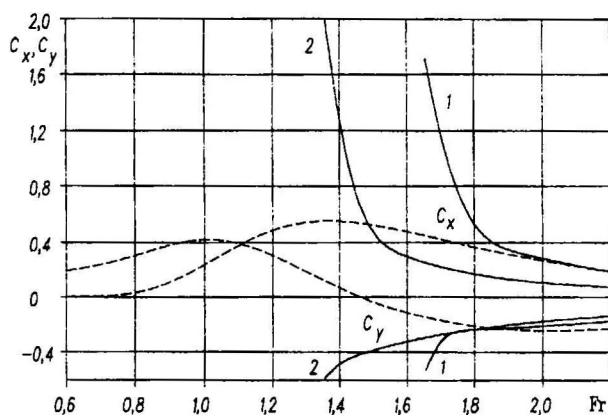


Рис. 1

На рис. 1 представлены расчеты коэффициента подъемной силы  $C_y = 2Y/(\rho U_0^2 a)$  и волнового сопротивления  $C_x = 2X/(\rho U_0^2 a)$  кругового цилиндра в зависимости от числа Фруда при  $\Gamma = 0$ . Сплошные кривые 1, 2 на рис. 1 соответствуют обтеканию цилиндра с числами Вебера  $We_g = \{1,855; 0,824\}$  при  $h/a = 3$ , что отвечает, к примеру, обтеканию цилиндров с радиусами  $a = 0,002$  и  $a = 0,003$  при коэффициенте поверхностного натяжения  $\alpha = 0,0728$  для границы вода-воздух при температуре

$T = 20^\circ \text{C}$ . Штриховые кривые соответствуют учету только силы весо-  
сти при той же относительной глубине погружения. Значит, влияние силы  
поверхностного натяжения может быть значительным. Пример расчета  
формы свободной поверхности представлен в [4].

## ЛИТЕРАТУРА К РАЗДЕЛУ 1

1. Сретенский Л.Н. *Теория волновых движений жидкости*. – М.: Наука, 1977. – 816 с.
2. Тумашев Г.Г., Черепенин Н.Д. *Задача о движении круглого цилиндра под свободной поверхностью тяжелой жидкости* // Тр. семинара по край-  
вым задачам. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1973. – Вып. 10. – С. 140-151.
3. Милн-Томсон Л.М. *Теоретическая гидродинамика*. – М.: Мир, 1964. – 656 с.
4. Елизаров А.М., Спиридонов О.А., Филиппов С.И. *Поступательное движение подводного контура. Гравитационно-капиллярные волны* // Тр. Математического центра им. Н.И.Лобачевского. – Казань: УНИПРЕСС, 2000. – Т. 5. – С. 269–270.

## 2. Расчет гидродинамических характеристик подводного крылового профиля при нелинейных граничных условиях



Рис. 1

Рассмотрим в системе координат, связанной с профилем  $C$ , имеющим толщину  $b$  и хорду длины  $l$ , установившийся поток идеальной несжимае-  
мой весомой жидкости плотности  $\rho$  (рис. 1). Пусть ось  $ox$  совпадает с не-  
возмущенным уровнем свободной поверхности  $E$  и направлена навстречу  
потoku, а ось  $oy$  – вертикально вверх и проходит через середину хорды

профиля – точку  $(0, -h)$ . Скорость потока на бесконечности перед профилем параллельна  $ox$  и равна  $-U$ .

В предположении потенциальности течения задача сводится к определению комплексного потенциала возмущенного течения  $W(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ ,  $z = x + iy$ , удовлетворяющего следующим граничным условиям:

$$-U(\partial\varphi/\partial x) + g\eta + |dW/dz|^2/2 = 0, \quad y = \eta(x), \quad (1)$$

$$-U\eta + \psi(x, \eta) = 0, \quad (2)$$

$$\partial\psi/\partial s = U \cos(n, x) \text{ на } C; \quad (3)$$

$$|dW/dz| \leq A \quad (A = \text{const}), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} dW/dz = 0, \quad (4)$$

где  $g$  – ускорение силы тяжести.

Воспользуемся теорией возмущений, примененной для обтекания крылового профиля в [1], и будем отыскивать решение в виде

$$W(z) = \sum_{k=1}^{\infty} w^{(k)}(z), \quad \eta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta^{(k)}(x), \quad U = \sum_{k=0}^{\infty} u^{(k)}, \quad (5)$$

где для малого параметра  $\varepsilon = b/h$  величины  $w^{(k)}(z)$ ,  $\eta^{(k)}(x)$ ,  $u^{(k)}$  будут иметь порядок  $O(\varepsilon^k)$ . Используя разложение (1), (2) в ряд Тейлора по  $y$  вблизи оси  $x$ , а также представления (5), сгруппировав члены одинакового порядка малости по  $\varepsilon$ , найдем

$$\text{Re} \left[ dw^{(k)}/dz + i v w^{(k)}(z) \right] = q^{(k)}(x), \quad v = g/u^{(0)2}, \quad k=1, 2, \dots, \quad (6)$$

$$q^{(1)}(x) \equiv 0, \quad q^{(2)}(x) = \left( \psi_x^{(1)2} + \psi_y^{(1)2} \right) / (2u^{(0)}) + \eta^{(1)} (v\psi_y^{(1)} - \psi_{yy}^{(1)}) - 2v\eta^{(1)}\eta^{(1)},$$

$$q^{(3)}(x) = v \left( \eta^{(2)}\psi_y^{(1)} + \frac{1}{2}\eta^{(1)2}\psi_{yy}^{(1)} + \eta^{(1)}\psi_y^{(2)} \right) - \eta^{(2)}\psi_{yy}^{(1)} - \frac{1}{2}\eta^{(1)2}\psi_{yyy}^{(1)} -$$

$$- \eta^{(1)}\psi_{yy}^{(2)} + \frac{1}{u^{(0)}} \left( \eta^{(1)}\psi_y^{(1)}\psi_{yy}^{(1)} + \eta^{(1)}\psi_x^{(1)}\psi_{xy}^{(1)} + \psi_y^{(1)}\psi_y^{(2)} + \psi_x^{(1)}\psi_x^{(2)} \right) -$$

$$- 2u^{(2)}v\eta^{(1)} + u^{(1)} \left( \eta^{(1)}\psi_{yy}^{(1)} - \psi_y^{(2)} - v\eta^{(2)} \right) \text{ и т. д.}$$

Граничное условие (3) можно представить в виде

$$\partial\psi^{(k)}/\partial s = u^{(k-1)} \cos(n, x) \text{ на } C. \quad (7)$$

Условие (4) будем считать выполняющимся для всех функций  $w^{(k)}(z) = \varphi^{(k)}(x, y) + i\psi^{(k)}(x, y)$ .

Для решения задачи применим метод, основанный на распределении двойного слоя особенностей по невозмущенному уровню свободной поверхности. Будем искать решение в виде суммы

$$W(z) = u^{(0)} \sum_{k=1}^{\infty} w^{(k)}(z) + \gamma w_{\gamma}(z), \quad (8)$$

где  $\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{(k)}$  — значение циркуляции. Функции  $u^{(0)} w^{(k)}(z)$  удовлетворяют условиям (6), (7) и (4). Многозначные функции  $w_{\gamma}(z)$  удовлетворяют условию (4) и условиям

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[dw_{\gamma}(z)/dz + i\gamma w_{\gamma}(z)] &= 0 \text{ при } y=0, \\ \partial\psi_{\gamma}/\partial s &= 0 \text{ на } C, \quad \Delta_C w_{\gamma}(z) = 1, \end{aligned}$$

где  $\Delta_C$  — приращение  $w_{\gamma}(z)$  при обходе контура  $C$ .

Согласно применяемому методу представим  $w^{(k)}(z)$  в виде

$$w^{(k)}(z) = w_{\infty}^{(k)}(z) + V^{(k)}(z) + \Phi^{(k)}(z), \quad (9)$$

где  $w_{\infty}^{(k)}(z) = u^{(k-1)} w_{\infty}^{(1)}(z) / u^{(0)}$ ,  $w_{\infty}^{(1)}(z)$  — потенциал обтекания контура безграничным потоком,

$$V^{(k)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu^{(k)}(t)}{z-t} dt, \quad \Phi^{(k)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} F(z, t) \mu^{(k)}(t) dt.$$

Функция  $F(z, t)$  строится в параметрической плоскости  $\zeta$  так, чтобы выполнялось условие на контуре (7):

$$\begin{aligned} F[f(\zeta) - ih, f(\tau) - ih] &= [H(\zeta, \tau) + G(\zeta, \tau)] / f'(\tau), \quad G(\zeta, \tau) = 1 / [\bar{\tau}^2 (\zeta - 1/\bar{\tau})], \\ H(\zeta, \tau) &= [f(\zeta) - f(\tau) - f'(\tau)(\zeta - \tau)] / \{(\zeta - \tau)[f(\zeta) - f(\tau)]\}. \end{aligned}$$

Здесь  $z = f(\zeta) - ih$  — конформное отображение внешности круга  $C^0: |\zeta| = 1$  на внешность профиля, причем  $f(\infty) = \infty$ ,  $\zeta_a = -1$  соответствует задней кромке профиля  $z_a$ ,  $\tau = f^{-1}(t + ih)$  при  $t \in E$ .

Для определения  $\mu^{(k)}(x)$  подставим (9) в (6):

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{dV^{(k)}}{dz} + ivV^{(k)} + \left( \frac{d}{dz} + iv \right) \Omega^{(k)}(z) \right] = q^{(k)}(x), \quad z = x - i \cdot 0,$$

где  $\Omega(z) = w_{\infty}^{(k)}(z) + \Phi^{(k)}(z)$ . Применяв специальный прием регуляризации [2], получим

$$V^{(k)}(z) = Q^{(k)}(z) + \overline{\Omega}^{(k)}(z) - 2 \exp(-ivz) \int_{\infty}^z \exp(ivv) \frac{d\overline{\Omega}^{(k)}(v)}{dv} dv, \quad (10)$$

$$Q^{(k)}(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-iv(z-t)] \operatorname{Ei}[iv(z-t)] q^{(k)}(t) dt. \quad (11)$$

Для сходимости интеграла (11), как показано в [1], необходимо, чтобы функции  $q^{(k)}(x)$  не были осциллирующими при больших отрицательных значениях  $x$ , отсюда при  $k=2$  имеем  $u^{(1)} = 0$ , а при  $k=3$   $u^{(2)} = v^2 a^{(1)2} u^{(0)} / 2$ , где  $a^{(1)}$  — амплитуда волн в линейной теории.. Найдя действительную часть предела (10) при  $z \rightarrow x$  в параметрической плоскости, для  $\mu^{(k)}$  получим соотношения

$$\mu^{(k)}(\xi) = \sigma^{(k)}(\xi) + \operatorname{Im} \int_T L(\xi, \tau) \mu^{(k)}(\tau) d\tau, \quad k=1, 2, \dots, \quad (12)$$

$$\sigma^{(k)}(\xi) = 2 \operatorname{Re} Q^{(k)}(\xi) + u^{(k-1)} \sigma^{(1)}(\xi) / u^{(0)},$$

$$\sigma^{(1)}(\xi) = 2 \operatorname{Re} \left\{ w_{\infty}^{(1)}(\xi) - 2 \exp[ivf(\xi)] \int_{\infty}^{\xi} \exp[-ivf(v)] \frac{dw_{\infty}^{(1)}}{dv} dv \right\},$$

$$w_{\infty}^{(1)}(\xi) = f(\xi) - (K\xi + \overline{K} / \xi), \quad K = f'_{\xi}(\infty),$$

$$L(\xi, \tau) = \frac{1}{\pi} \left\{ H(\xi, \tau) + G(\xi, \tau) - \right.$$

$$\left. - 2 \exp[ivf(\xi)] \int_{\infty}^{\xi} \exp[-ivf(v)] \cdot [H'_v(v, \tau) + G'_v(v, \tau)] dv \right\},$$

где  $\xi = f^{-1}(x + ih)$  — уравнение образа  $T$  свободной поверхности в плоскости  $\zeta$ . Для нахождения циркуляционной части потенциала  $W(z)$  представим  $w_{\gamma}(z)$  в виде, аналогичном (9), заменив  $\mu^{(k)}$  на  $\mu_{\gamma}$ . В



итоге для определения  $\mu_\gamma$  получается уравнение типа (12) с тем же интегральным ядром  $L(\xi, \tau)$  и

$$\sigma = \sigma_\gamma(\xi) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ \ln \frac{(\xi - 1/\bar{\zeta}_\gamma) [f(\xi) - f(\zeta_\gamma)]}{(\xi - \zeta_\gamma) [f(\xi) - \bar{f}(\zeta_\gamma) - 2ih]} - \right. \\ \left. - 2 \exp[i\nu f(\xi)] \int_{-\infty}^{\xi} \exp[-i\nu f(v)] \cdot \left[ \frac{1}{v - 1/\bar{\zeta}_\gamma} + \frac{f'(v)}{f(v) - f(\zeta_\gamma)} - \frac{1}{v - \zeta_\gamma} \right] dv \right\},$$

где  $\zeta_\gamma$  — точка вне области течения и  $\zeta_\gamma \notin I(C^0)$  [2].

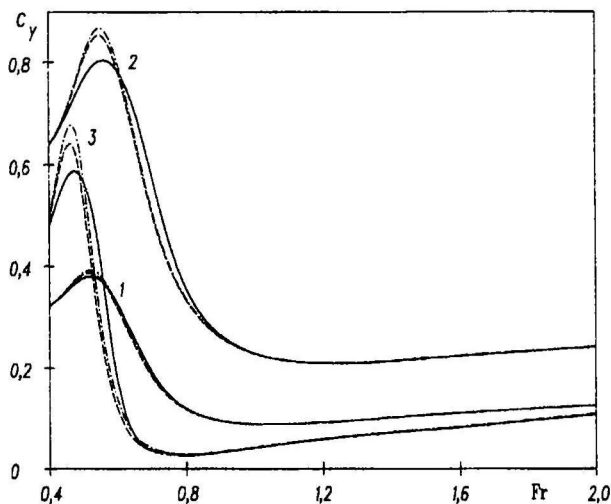


Рис. 2

Значение циркуляции находится из постулата Жуковского-Чаплыгина о конечности скорости на острой кромке профиля

$$\gamma^{(k)} = \frac{2\pi \operatorname{Im}(-K + \bar{K}/\zeta_a^2) + u^{(0)} \operatorname{Re} J^{(k)}(\zeta_a)}{\operatorname{Re}[(\zeta_a - 1/\bar{\zeta}_\gamma)^{-1} - (\zeta_a - \zeta_\gamma)^{-1} - J_\gamma(\zeta_a)]}, \quad J_\gamma(\zeta_a) = \int_T I(\zeta_a, \tau) \mu_\gamma(\tau) d\tau \\ J^{(k)}(\zeta_a) = \int_T I(\zeta_a, \tau) \mu^{(k)}(\tau) d\tau, \quad I(\zeta_a, \tau) = (\zeta_a - \tau)^{-2} + [\bar{\tau}(\zeta_a - 1/\bar{\tau})]^{-2}. \quad (13)$$

Уравнение (12) можно записать в операторном виде

$$\mu^{(k)}(\xi) = \sigma^{(k)}(\xi) + B[\mu^{(k)}]. \quad (14)$$

При достаточном погружении  $h$  оператор  $B$  – сжимающий. Решение уравнения (14) получается методом последовательных приближений. Аналогично решается уравнение относительно  $\mu_\gamma$ . Вычислив по формуле (13) значение циркуляции, можем определить комплексный потенциал течения и по формуле Чаплыгина найти волновое сопротивление и подъемную силу профиля. Возвышение свободной поверхности определяется по формулам

$$\begin{aligned} \eta^{(1)} &= \frac{1}{u^{(0)}} \psi^{(1)}(x, 0), \\ \eta^{(2)} &= \frac{1}{u^{(0)}} \left[ \psi^{(2)} + \eta^{(1)} \psi_y^{(1)} - u^{(1)} \eta^{(1)} \right]_{y=0}, \\ \eta^{(3)} &= \frac{1}{u^{(0)}} \left[ \psi^{(3)} + \eta^{(2)} \psi_y^{(1)} + \eta^{(1)} \psi_y^{(2)} + \frac{1}{2} \eta^{(1)2} - u^{(2)} \eta^{(1)} - u^{(1)} \eta^{(2)} \right]_{y=0}. \end{aligned}$$

Результаты расчетов коэффициента подъемной силы  $C_y = 2Y/(\rho U^2 l)$  в зависимости от числа Фруда  $Fr = U/\sqrt{gl}$  для профиля NACA-66mod представлены на рис. 2. Штрих-пунктирные, штриховые и сплошные кривые на рисунках соответствуют теории возмущений первого, второго и третьего порядков. Для кривых 1:  $h/l=0,6$ ,  $\alpha=1^\circ$  ( $\alpha$  – угол атаки); для кривых 2:  $h/l=0,6$ ,  $\alpha=3^\circ$ ; для кривых 3:  $h/l=0,4$ ,  $\alpha=1^\circ$ . Отметим, что различие результатов по теории первого - третьего порядков относится к диапазону чисел Фруда в области максимальных значений  $C_y$  и возрастает с уменьшением глубины погружения и увеличением угла атаки. Пример расчета формы свободной поверхности при  $h/l=0,4$ ;  $\alpha=1^\circ$  и  $Fr=0,611$  представлен на рис. 1.

## ЛИТЕРАТУРА К РАЗДЕЛУ 2

1. Salvesen N. *On higher-order wave theory for submerged two-dimensional bodies* // J. Fluid Mech. – 1969. – V. 38. – No. 2. – P. 415–432.

2. Лотфуллин М.В., Филиппов С.И. Моделирование границ раздела в задачах обтекания профиля крыла весомой жидкостью // ПМТФ. – 1992. – № 4. – С. 84–89.

### 3. Аппроксимация Киселева–Тумашева граничного условия на свободной поверхности

Применяемые методы решения задач теории подводного крыла обычно связаны с переносом граничных условий на невозмущенный уровень свободной поверхности и непригодны для исследования течений при больших числах Фруда, когда деформация свободной поверхности может быть

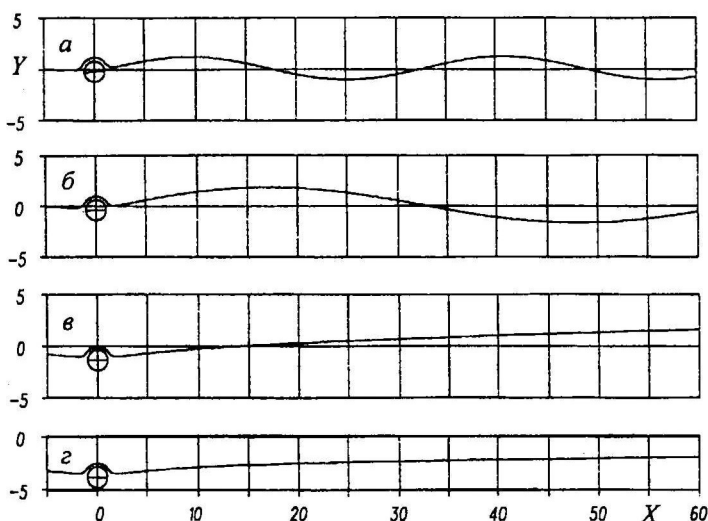


Рис. 1

весьма значительной. Г.Г.Тумашев [1] и О.М.Киселев [2] независимо предложили аппроксимацию граничного условия на свободной поверхности, основанную на единственном допущении о том, что модуль скорости  $V$  на свободной поверхности близок к своему значению  $V_0$  в невозмущенном потоке, т. е. процедура сноса граничных условий отсутствует. Это позволяет получать решения, переходящие в точные при  $Fr \rightarrow \infty$ .

Исследование обтекания телесного контура на основе аппроксимации [1, 2] было начато в работе [3]. Однако использованные в [3] операции над медленно сходящимися рядами существенно снижали эффективность метода, ограничивая область его применения профилями, близкими к кругу и достаточно удаленными от свободной поверхности. В работе [4] предложен усовершенствованный метод. Удалось рассмотреть малопогруженный круговой цилиндр, а также некруговой профиль. Пример расчета формы свободной поверхности и положения малопогруженного кругового цилиндра представлен на рис. 1, где  $\gamma_R = \Gamma / V_0 R = 1$  ( $\Gamma$  – значение циркуляции,  $R$  – радиус цилиндра),  $H_R = H / R = 0,35$  ( $H$  – расстояние от разветвляющейся на контуре линии тока до свободной поверхности при  $x = -\infty$ ). Положение точек разветвления и схода потока отмечено с помощью соответствующих радиусов. Варианты *a*, *b*, *в*, *г* соответствуют числам Фруда  $Fr_R = V_0^2 / gR = 5, 10, 10^2, 10^4$ .

Работы выполнены при поддержке РФФИ (проекты 99-01-00169, 99-01-00173), фонда НИОКР АНТ и программы “Университеты России”.

### ЛИТЕРАТУРА К РАЗДЕЛУ 3

1. Тумашев Г.Г. *Одна обратная краевая задача о кавитационном течении тяжелой несжимаемой жидкости* // Итоговая научная конференция Казанского ун-та за 1962 г. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1963. – С. 112–113.
2. Киселев О.М. *О некоторых приближенных методах решения струйных задач для тяжелой жидкости* // Итоговая научная конференция Казанского ун-та за 1962 г. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1963. – С. 118–120.
3. Киселев О.М., Троепольская О.В. *О поступательном движении цилиндра под свободной поверхностью жидкости* // Изв. РАН, Механика жидкости и газа. – 1996. – № 6. – С. 9–22.
4. Киселев О.М., Филиппов С.И. *О движении цилиндра под свободной поверхностью жидкости при больших числах Фруда*. // Изв. РАН, Механика жидкости и газа. – 2000. – № 4. – С. 34–45.